

**PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT
TUBERKULOSIS DENGAN PENDEKATAN KONTROL
OPTIMAL DAN PENAKSIRAN PARAMETER**

SKRIPSI



**Oleh:
LISA SUSANTI
2217010034**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN IMAM BONJOL PADANG
2026**

**PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT
TUBERKULOSIS DENGAN PENDEKATAN KONTROL
OPTIMAL DAN PENAKSIRAN PARAMETER**

SKRIPSI

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat untuk Meraih Gelar Sarjana (S1)



**Oleh:
LISA SUSANTI
2217010034**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN IMAM BONJOL PADANG
2026**

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

**Skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri,
dan semua sumber baik yang dikutip maupun dirujuk
telah saya nyatakan dengan benar.**

Padang, 23 Februari 2026

Yang Membuat Pernyataan,



LISA SUSANTI

HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi dengan judul **Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Pendekatan Kontrol Optimal dan Penaksiran Parameter** yang disusun oleh **Lisa Susanti** NIM **2217010034**, telah diperiksa dan disetujui untuk diajukan dalam sidang skripsi pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Imam Bonjol Padang.

Padang, 06 Februari 2026

Menyetujui:

Pembimbing I



La Ode Sabran, M.Si.
NIP 198804252020121006

Pembimbing II

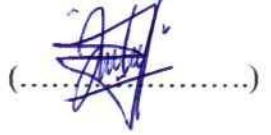


Ilham Dangu Rianjaya, M.Si.
NIP 199207022020121009

HALAMAN PENGUJIAN

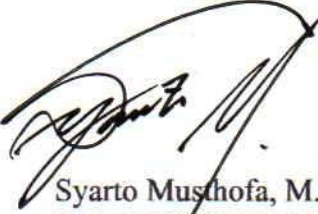
Skripsi dengan judul **Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Pendekatan Kontrol Optimal dan Penaksiran Parameter** yang disusun oleh **Lisa Susanti NIM 2217010034**, telah diuji di depan Tim Penguji pada hari Kamis, tanggal 12 Februari 2026.

Tim Penguji:

	Nama	Jabatan	Tanda Tangan
1	Syarto Musthofa, M.Sc. NIP 199309152020121012	(Ketua)	
2	Ahmad Fauzi, M.T.I. NIP 198805092018011001	(Sekretaris)	
3	La Ode Sabran, M.Si. NIP 198804252020121006	(Anggota)	
4	Ilham Dangu Rianjaya, M.Si. NIP 199207022020121009	(Anggota)	

Mengetahui:

Ketua Program Studi Matematika


Syarto Musthofa, M.Sc.
NIP 199309152020121012

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi dengan judul **Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Pendekatan Kontrol Optimal dan Penaksiran Parameter** yang disusun oleh **Lisa Susanti** NIM 2217010034 Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Imam Bonjol Padang telah dipertahankan di depan Tim Penguji Sidang Skripsi pada tanggal 12 Februari 2026 dan dinyatakan memenuhi syarat.

Disahkan di : Padang

Tanggal : 23 Februari 2026

Menyetujui:

Pembimbing I



La Ode Sabran, M.Si.
NIP 198804252020121006

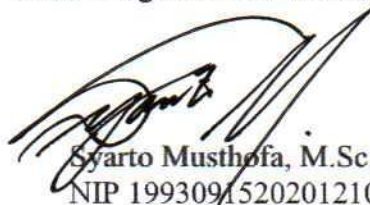
Pembimbing II



Ilham Dangu Rianjaya, M.Si.
NIP 199207022020121009

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Syarto Musthofa, M.Sc.
NIP 199309152020121012

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi



Dr. Yulia, M.Pd.
NIP 198105052009012008

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **“Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan pendekatan Kontrol Optimal dan Penaksiran Parameter”**. Skripsi ini disusun untuk memenuhi persyaratan akademik dalam menyelesaikan pendidikan pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang.

Skripsi ini tentu belum luput dari berbagai kekurangan akibat keterbatasan pengetahuan yang penulis miliki. Oleh karena itu saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan guna perbaikan di masa yang akan datang. Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada semua pihak yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, nasehat, dan pemikiran dalam pengerjaan skripsi ini. Terutama , penulis berterima kasih kepada:

1. Dekan dan Civitas Akademik Fakultas Sains dan Teknologi.
2. Ketua dan Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
3. La Ode Sabran, M.Si. selaku pembimbing I sekaligus penguji yang telah memberikan arahan dan saran kepada penulis dalam penulisan skripsi ini.
4. Ilham Dangu Rianjaya, M.Si. selaku pembimbing II sekaligus penguji yang telah memberikan arahan dan saran kepada penulis.
5. Ezhari Asfa'ani, M.Sc. selaku pembimbing akademik yang telah memberikan kritik, arahan, dan saran kepada penulis dalam penulisan skripsi ini.
6. Syarto Musthofa, M.Sc. selaku penguji I yang telah berkesempatan menguji skripsi, memberikan kritik dan saran sekaligus arahan kepada penulis.
7. Ahmad Fauzi, M.T.I. selaku penguji II yang telah berkesempatan menguji skripsi, memberikan kritik dan saran sekaligus arahan kepada penulis.
8. Bapak/Ibu Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan bantuan ilmu, arahan dan motivasi dari awal perkuliahan hingga skripsi ini selesai.

9. Orangtua dan keluarga di rumah yaitu ayah Jasril, ibu Nurdayeni, saudara Nofri Andika, dan Sepriadi yang selalu memberikan do'a, dukungan dan motivasi kepada penulis.
10. Teman-teman seangkatan 2022 yang telah memberikan dukungan, do'a serta menemani perjalanan dari awal perkuliahan hingga akhir.
11. Pihak-pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu tanpa mengurangi rasa hormat, yang telah memberikan dorongan dan bantuan sehingga skripsi ini terselesaikan.

Padang, 23 Februari 2026

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Jasril A.', written over a horizontal line.

Penulis

**HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA
ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lisa Susanti
NIM : 2217010034
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit
Tuberkulosis dengan Pendekatan Kontrol Optimal
dan Penaksiran Parameter

Dengan ini menyatakan persetujuan untuk dipublikasikannya karya ilmiah
(skripsi) saya oleh pihak UIN Imam Bonjol Padang untuk kepentingan akademis.

Padang, 23 Februari 2026

Yang membuat Pernyataan,



Lisa Susanti

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mengembangkan model matematika penyebaran penyakit Tuberkulosis dengan membagi populasi menjadi lima kompartemen yaitu *Susceptibel*, *Latent*, *Infected*, *Treatment* dan *Recovered*. Hasil analisis dinamik dari model menunjukkan bahwa terdapat dua titik ekuilibrium model, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) dan endemik (E_1) yang bergantung pada bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\Lambda\beta\theta(\alpha+\mu+\tau)}{(\mu^2+(\kappa+\tau+\alpha+\gamma)\mu+(\kappa+\gamma)\alpha+\kappa\tau)\mu N(\delta+\mu+\theta)}$. Agar model dapat menggambarkan keadaan sebenarnya dari penyakit TB, parameter model diestimasi menggunakan data kasus Tuberkulosis di Indonesia tahun 2000 sampai 2025 melalui algoritma *Particle Swarm Optimization*. Lebih jauh untuk mengendalikan penyebaran penyakit, pada model diterapkan kontrol optimal berupa vaksinasi. Hasil simulasi numerik pada model menunjukkan bahwa penerapan kontrol vaksinasi berhasil mengendalikan penyebaran penyakit dan jumlah individu pada semua kompartemen.

Kata Kunci: Model Matematika Tuberkulosis, Bilangan Reproduksi Dasar, Estimasi Parameter, Kontrol Optimal, *Particle Swarm Optimization*.

ABSTRACT

This study aims to develop a mathematical model of tuberculosis disease spread by dividing the population into five compartments, namely Susceptible, Latent, Infected, Treatment, and Recovered. The result of the dynamic analysis of the model show that there are two equilibrium points, namely disease-free equilibrium point (E_0), and endemic equilibrium point (E_1), which depend on the basic reproduction number $R_0 = \frac{\Lambda\beta\theta(\alpha+\mu+\tau)}{(\mu^2+(\kappa+\tau+\alpha+\gamma)\mu+(\kappa+\gamma)\alpha+\kappa\tau)\mu N(\delta+\mu+\theta)}$. In order for the model to accurately describe the actual state of TB, the model parameters were estimated using data on tuberculosis cases in Indonesia from 2000 to 2025 through the Particle Swarm Optimization algorithm. Furthermore, to control the spread of disease, optimal control in the form of vaccination was applied to the model. The results of numerical simulations on the model showed that the application of vaccination control successfully controlled the spread of disease and the number of individuals in all compartments

Keywords: *Tuberculosis Mathematical Model, Basic Reproduction Number, Parameter Estimation, Optimal control, Particle Swarm Optimization.*

DAFTAR ISI

HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	iii
HALAMAN PERSETUJUAN	iv
HALAMAN PENGUJIAN	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
HALAMAN PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS	ix
ABSTRAK	x
<i>ABSTRACT</i>	xi
DAFTAR ISI.....	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	4
C. Batasan Masalah.....	4
D. Tujuan Penelitian	4
E. Manfaat Penelitian	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	6
A. Kerangka Teori.....	6
1. Tuberkulosis	6
2. Persamaan Diferensial.....	9
3. Sistem Persamaan Diferensial.....	10
4. Titik Ekuilibrium dan Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	16
5. Formula Vieta.....	23
6. Model SEIR.....	26
7. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) dan NGM	28
8. Estimasi Parameter.....	29
9. Kontrol Optimal	31

B. Literatur Review	34
BAB III METODE PENELITIAN	36
A. Jenis Penelitian.....	36
B. <i>Setting</i> Penelitian.....	36
C. Langkah-langkah Penelitian.....	36
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	38
A. Asumsi Model	38
B. Variabel dan Parameter	39
C. Model Matematika Penyebaran Penyakit TB	40
D. Analisis Sistem Dinamik.....	46
1. Titik Ekuilibrium.....	46
2. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	51
E. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium	53
1. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	54
2. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik	58
F. Estimasi Parameter Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis.....	60
1. Data yang Digunakan	61
2. Inisialisasi.....	62
3. Hasil Simulasi	63
G. Kontrol Optimal	65
1. Persamaan <i>State</i> dan Fungsi Tujuan	65
2. Penentuan Kontrol Optimal.....	66
H. Simulasi Numerik	67
1. Simulasi Model pada Kasus Bebas Penyakit	68
2. Simulasi Numerik Berdasarkan Data Hasil Estimasi Parameter.....	71
3. Simulasi Numerik dengan Penerapan Kontrol Optimal.....	73
BAB V PENUTUP	79
A. Kesimpulan	79
B. Saran.....	80
DAFTAR PUSTAKA	81
LAMPIRAN.....	86

DAFTAR TABEL

Nomor Tabel	Judul Tabel	Halaman
Tabel 4.1.	Daftar Variabel Model Penyakit TB.....	39
Tabel 4.2.	Daftar Parameter Model Penyakit TB.....	39
Tabel 4.3.	Data Jumlah Penemuan Kasus TB di Indonesia 2000-2025.....	61
Tabel 4.4.	Inisialisasi Nilai Parameter dan Variabel.....	62
Tabel 4.5.	Hasil Estimasi Parameter Model SLITR.....	63
Tabel 4.6.	Jumlah Populasi Awal.....	68
Tabel 4.7.	Nilai Parameter Bebas Penyakit TB.....	68

DAFTAR GAMBAR

Nomor Gambar	Judul Gambar	Halaman
Gambar 2.1	Diagram Transmisi Model Kompartemen SEIR.....	27
Gambar 4.1	Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran Penyakit TB.....	40
Gambar 4.2	Perbandingan Data Lapangan dan Simulasi Algoritma PSO	65
Gambar 4.3	Dinamika Kompartemen S Saat $R_0 < 1$	69
Gambar 4.4	Dinamika Kompartemen L , I , dan T Saat $R_0 < 1$	70
Gambar 4.5	Dinamika Kompartemen R Saat $R_0 < 1$	70
Gambar 4.6	Dinamika Kompartemen S Saat $R_0 > 1$	71
Gambar 4.7	Dinamika Kompartemen L Saat $R_0 > 1$	72
Gambar 4.8	Dinamika Kompartemen I dan T Saat $R_0 > 1$	72
Gambar 4.9	Dinamika Kompartemen R Saat $R_0 > 1$	73
Gambar 4.10	Tingkat Penerapan Kontrol Vaksinasi.....	74
Gambar 4.11	Perbandingan Jumlah Individu Rentan.....	74
Gambar 4.12	Perbandingan Jumlah Individu Terpapar.....	75
Gambar 4.13	Perbandingan Jumlah Individu Terinfeksi.....	76
Gambar 4.14	Perbandingan Jumlah Individu dalam Pengobatan.....	76
Gambar 4.15	Perbandingan Jumlah Individu Sembuh.....	77

DAFTAR LAMPIRAN

Nomor Lampiran	Judul Lampiran	Halaman
Lampiran 1.	Estimasi Parameter Menggunakan Algoritma PSO.....	86
Lampiran 2.	Simulasi Numerik Model $R_0 < 1$	94
Lampiran 3.	Simulasi Numerik Model $R_0 > 1$	96
Lampiran 4.	Simulasi Model Tanpa Kontrol	99
Lampiran 5.	Simulasi Numerik Model dengan Kontrol	100