

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Merujuk pada pembahasan yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut.

1. Model matematika *predator prey* dengan mempertimbangkan zona perlindungan, fungsi respon Holling tipe II, dan efek Allee dinyatakan oleh sistem persamaan diferensial tak linear sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta(1 - \theta)xy}{1 + \gamma(1 - \theta)x} - nx,$$

$$\frac{dy}{dt} = c \frac{\beta(1 - \theta)xy}{1 + \gamma(1 - \theta)x} \left(\frac{y}{A} - 1\right) - my.$$

2. Berdasarkan model tersebut, diperoleh tiga titik ekuilibrium yaitu:

- a. Titik ekuilibrium trivial

$$E_1 = (0,0),$$

yang menggambarkan kepunahan populasi *prey* dan *predator*.

- b. Titik ekuilibrium bebas *predator*

$$E_2 = \left(\frac{K(r-n)}{r}, 0\right),$$

yang menggambarkan hanya spesies *prey* yang tetap bertahan hidup, sementara spesies *predator* punah.

- c. Titik ekuilibrium koeksistensi

$$E_3 = (x^*, y^*),$$

dengan

$$y = \frac{(r(K - x) - Kn)(1 + \gamma(1 - \theta)x)}{K\beta(1 - \theta)},$$

dan x merupakan akar riil positif dari persamaan implisit

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

3. Analisis bifurkasi terhadap parameter laju pertumbuhan *prey* r menunjukkan bahwa perubahan nilai parameter tersebut mempengaruhi eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium sistem.

- a. Untuk $r < n$, titik ekuilibrium E_1 merupakan satu-satunya titik yang eksis dan stabil.
 - b. Untuk $r > n$, titik ekuilibrium E_2 dan E_3 eksis. Titik ekuilibrium E_3 bercabang menjadi dua, yaitu $E_3^{(1)}$ dan $E_3^{(2)}$. Kemunculan kedua titik ini terjadi setelah parameter melewati nilai kritis $r = n$ yang menunjukkan adanya perubahan jumlah titik ekuilibrium. Fenomena ini mengindikasikan terjadinya bifurkasi *saddle node* pada titik ekuilibrium E_3 . Meskipun kedua cabang tersebut eksis, hasil analisis bifurkasi menunjukkan bahwa keduanya tidak stabil. Oleh karena itu, simulasi numerik pada titik ekuilibrium E_3 tidak dilakukan.
 - c. Pertukaran kestabilan yang terjadi pada saat $r = n$ atau $\frac{r}{n} = 1$ antara titik ekuilibrium E_1 dan E_2 menandakan bahwa terjadi bifurkasi transkritikal.
4. Hasil dari simulasi numerik untuk titik ekuilibrium E_1 dan E_2 terbukti eksis dan stabil, yang konsisten dengan hasil analisis kestabilannya.

B. Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan model matematika *predator prey* dengan mempertimbangkan bentuk fungsi respon Holling yang berbeda. Selain itu, analisis bifurkasi global dan simulasi numerik lanjutan dengan variasi lebih dari satu parameter juga dapat dilakukan untuk memperoleh gambaran yang lebih menyeluruh mengenai dinamika sistem.

DAFTAR PUSTAKA

- Amalia, D., & Savitri, D. (2023). Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Fungsi Respon Monod-Haldane. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(02), 287–294.
- Amara, A. D., & Savitri, D. (2022). Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Efek Ketakutan. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 10(1), 140–149.
- Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Penerbit Erlangga.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (9th ed.)*. John Wiley and Sons. New York.
- Chasnov, J. R. (2009). *The Lotka-Volterra predator-prey model*. The Hong Kong University of Science and Technology, Department of Mathematics.
- Chasnov, J. R. (2017). *Applied Linear Algebra and Differential Equations*. Hong Kong University of Science and Technology.
- Gao, S., Hu, J., & Yu, Y. (2018). Iterative Methods for Polynomial Equations Based on Vieta's Theorem. *8th International Conference on Mechatronics, Computer and Education Informationization (MCEI 2018)*, 83, 107–111.
- Hariato, J., & Sari, I. P. (2022). Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Model. *Majalah Ilmiah Matematika Dan Statistika*, 22(1), 59–68.
- J. Lotka, A. (1925). *Elements of Physical Biology*. Waverly Press.
- Jannah, Z. Z. (2016). Aplikasi Pemodelan Prey Predator Terhadap Cash Flow Keuangan di Bank BRI Pamekasan. *Zeta-Math Journal*, 2(1), 2459–9948.
- Levin, S. A. (2002). *Descartes' Rule of Signs*. Stanford University.
- Lynch, S. (2018). *Dynamical Systems with Applications using Python*. Springer International Publishing AG.
- Ma, Z., Wang, S., Wang, T., & Tang, H. (2017). Stability analysis of prey-predator system with Holling type functional response and prey refuge. *Advances in Difference Equations*, 2017(1).
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I. An Introduction , Third Edition*. Springer.
- Nagy, G. (2015). *Ordinary Differential Equations*. Michigan State University.

- Ningrum, R. E., Abadi, & Yuliani, P. A. (2019). Model Matematika Mangsa Pemangsa Dua Spesies dengan Fungsi Respon Holling Tipe II dan Perilaku Anti-Pemangsa. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 7, 10–14.
- Olsder, G. ., & Woude, J. . van der. (2003). *Mathematical Systems Theory*. Delf University Press.
- Olsder, G. ., Woude, J. . van der, Maks, J. ., & Jeltsema. (2011). *Mathematical Systems Theory fourth edition*. VVSD.
- Panigoro, H. S., & Savitri, D. (2020). Bifurkasi Hopf pada Model Lotka-Volterra Orde-Fraksional dengan Efek Allee Aditif pada Predator. *Jambura Journal of Biomathematics (JJBM)*, 1(1), 16–24.
- Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical (Third Edituon)*. Department of Mathematics Northern Arizona University Flagstaff.
- Resmawan. (2019). Pemodelan Matematika Semester Ganjil 2019-2020 Pemodelan Deterministik Dinamika Populasi. In *Pemodelan Matematika*. Universitas Negeri Gorontalo.
- Resmawan, R., Nuha, A. R., Nasib, S. K., & Nashar, L. O. (2024). Dynamical Analysis of a Predator-Prey Model Involving Intraspecific Competition in Predator and Prey Protection. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, 8(3).
- Rohmatunnisa, H., Asih, T. S. N., Waluya, S. B., & Safa'atullah, M. F. (2023). The influence of Allee effect, refugia, and alternative food on a three-species predator-prey model. *UNNES Journal of Mathematics*, 12(2), 1–13.
- Ross, S. L. (1989). *Introduction to Ordinary Differential Equations Fourth Edition*. John Willey and Sons. Canada.
- Saadah, S., Abadi, & Savitri, D. (2020). Bifurkasi pada Model Interaksi Mangsa Pemangsa dengan Perilaku Anti Pemangsa. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 3, 95–103.
- Salmah. (2020). *Teori Sistem Kendali Linear dan Aplikasinya*. Gajah Mada University Press.
- Santriawan, L. D., Marwan, & Aini, Q. (2025). *Dynamics and Bifurcation of The Predator-Prey System with Monod-Haldane Fuctional Response*. Universitas Mataram.
- Sari, A. P., & Waluya, S. B. (2021). Analisis Model Predator-Prey dengan Protection Zone Menggunakan Fungsi Respon Holling Tipe II. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 2, 736–742.

Stewart, J. (2003). *Kalkulus (Edisi Keeempat) Jilid 2*. Penerbit Erlangga.

Villate, J. E. (2019). *Dynamics and Dynamical Systems*. University of Porto.

Wiggins, S. (2003). *An Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos Second Edition*. Springer.

Wilda, R. W., Monita, D., Afli, F., & Kadafi, A. M. (2023). Analisis Kestabilan Model Predator Prey dengan Tingkatan Usia pada Dua Prey dan Dua Predator dengan Fungsi Respon Monod-Haldane dan Kanibalisme. *Epsilon: Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, 17(2), 249–263.

Zevika, M., & Himmi, S. K. (2025). Mathematical Biosciences Optimal control of eggplant pest populations in a Predator – Prey –Parasitoid model with seasonal growth effects. *Mathematical Biosciences*, 387.

