

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Kerangka Teori

Subbab ini akan menjelaskan beberapa definisi yang berkaitan dengan himpunan dan fungsi, barisan, kekontinuan fungsi, himpunan fuzzy, ruang metrik, serta ruang metrik fuzzy beserta contohnya.

1. Himpunan dan Fungsi

Pada bagian ini akan menjelaskan definisi himpunan, hasil kali silang, fungsi, nilai mutlak, dan juga persekitaran yang disertai dengan contohnya.

Definisi 2.1 (Fahmi & Priwanto, 2021)

“Himpunan adalah setiap daftar, kumpulan atau objek – objek yang terdefinisi secara jelas.”

Jika a adalah sebuah elemen yang berada di himpunan C , maka dapat ditulis $a \in C$ dan a disebut sebagai anggota dari C . Jika a tidak terletak di dalam C , maka dapat ditulis $a \notin C$. Jika setiap elemen dari himpunan C juga merupakan bagian dari himpunan D , maka C dapat disebut sebagai himpunan bagian dari D dan ditulis $C \subseteq D$. Apabila himpunan C adalah sebuah himpunan bagian dari himpunan D , tetapi setidaknya ada satu elemen dari D yang tidak ada di C , maka dapat ditulis $C \subset D$ (Bartle & Sherbert, 2011).

Contoh 2.1: (Bahri, 2016)

- (i) Misalkan K adalah himpunan yang terdiri dari huruf – huruf vokal
 $K = \{a, i, u, e, o\}$, maka $a \in K$ tetapi $s \notin K$.
- (ii) Misalkan L adalah himpunan bilangan ganjil, maka $11 \in L$ tetapi $6 \notin L$.
- (iii) Misalkan $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $N = \{2,4,6,8\}$, dan $O = \{4,6,7,11\}$,
maka $O \subset M$ tetapi $O \not\subset N$.

Definisi 2.2 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong, maka hasil kali silang $A \times B$ dari A dan B adalah himpunan dari pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, dinotasikan sebagai:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}. \quad (2.1)$$

Contoh 2.2:

Diketahui $P = \{1,2,3\}$ dan $Q = \{1,5\}$, maka hasil dari $P \times Q$ adalah

$$P \times Q = \{(1,1), (1,5), (2,1), (2,5), (3,1), (3,5)\}.$$

Definisi 2.3 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Misalkan A dan B adalah himpunan, maka f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B yang terdiri dari pasangan terurut $A \times B$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ terdapat satu $y \in B$, dapat ditulis dengan

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y.”$$

Elemen y yang terkait dengan x disebut pemetaan dari x dan ditulis dengan

$$y = f(x). \quad (2.2)$$

Contoh 2.3:

Misalkan $U = \{2,4\}$ dan $V = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Pemetaan $f: U \rightarrow V$ dengan $f(u) = u^2 + 2$ merupakan fungsi, karena $f(2) = (2)^2 + 2 = 6$ dan $f(4) = (4)^2 + 2 = 18$. Jadi pemetaan elemen u di himpunan U ke himpunan V tepat satu pasangan.

Definisi 2.4 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Nilai mutlak dari suatu bilangan real x , dinotasikan dengan $|x|$, dan didefinisikan dengan

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ 0, & \text{jika } x = 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Contoh 2.4: $|-3| = 3$ dan $|5| = 5$

Teorema 2.1 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, berlaku

(i) $|xy| = |x||y|$

(ii) $|x|^2 = x^2$

(iii) Jika $z \geq 0$, maka $|x| \leq z$ jika dan hanya jika $-z \leq x \leq z$

(iv) $-|x| \leq x \leq |x|.$ ”

Bukti:

- (i) Misalkan $x \neq 0$ dan $y = 0$, maka

$$|xy| = 0 = |x|0 = |x||y|$$

Jika $x > 0$ dan $y > 0$, sehingga $xy > 0$, maka

$$|xy| = xy = |x||y|.$$

Jika $x > 0$ dan $y < 0$, sehingga $xy < 0$, maka

$$|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|.$$

Jika $x < 0$ dan $y < 0$, sehingga $xy > 0$, maka

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|.$$

- (ii) Diketahui $x^2 \geq 0$, maka $x^2 = |x^2| = |xx| = |x||x| = |x|^2$.

- (iii) $(\Rightarrow)$ Jika $|x| \leq z$. Kemungkinan nilai $|x|$ adalah x atau $-x$, maka $|x| \leq z$ mengakibatkan $x \leq z$ atau $-x \leq z$, sehingga didapatkan $-z \leq x \leq z$.

$(\Leftarrow)$ Jika $-z \leq x \leq z$, maka diperoleh $x \leq z$ dan $-x \leq z$ atau $-z \leq x$.

Karena diketahui bahwa $|x|$ bernilai x atau $-x$, maka dapat disimpulkan $|x| \leq z$.

- (iv) Berdasarkan (iii), misalkan $z = |x|$ sehingga diperoleh $-|x| \leq x \leq |x|$.

Teorema 2.2 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Untuk setiap $p, q \in \mathbb{R}$, berlaku

$$|p + q| \leq |p| + |q|. \quad (2.4)$$

Bukti:

Misalkan $p, q \in \mathbb{R}$, berdasarkan Teorema 2.1 (iv) didapatkan $-|p| \leq p \leq |p|$ dan $-|q| \leq q \leq |q|$. Dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan di atas maka,

$$-(|p| + |q|) \leq p + q \leq |p| + |q|.$$

Berdasarkan Teorema 2.1 (iii) diperoleh

$$|p + q| \leq |p| + |q|.$$

Definisi 2.5 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, maka persekitaran $-\varepsilon$ dari a adalah himpunan

$$V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}. \quad (2.5)$$

Contoh 2.5:

Persekitaran dari 5 dengan jari – jari 3 adalah

$$V_3(5) := \{x \in \mathbb{R} : |x - 5| < 3\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 8\}$$

2. Barisan

Pada bagian ini akan dibahas konsep dasar barisan bilangan real, termasuk definisi barisan, sifat kekonvergenan, serta konsep barisan Cauchy yang disertai dengan contohnya.

Definisi 2.6 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Sebuah barisan bilangan real adalah sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ yang daerah hasilnya berada di dalam himpunan $\mathbb{R}$. ”

Contoh 2.6: (Bartle & Sherbert, 2011)

Misalkan x merupakan elemen dari $\mathbb{R}$ serta $X = (x^n)$ adalah barisan $X = (x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots)$.

Jika $x = \frac{1}{2}$, maka didapatkan barisan $\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$.

Definisi 2.7 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Sebuah barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ atau x merupakan limit dari (x_n) , jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$. ”

Jika suatu barisan memiliki limit, maka disebut konvergen. Sebaliknya, disebut divergen jika suatu barisan tidak memiliki limit. Misalkan suatu barisan (x_n) mempunyai limit x , maka dapat ditulis dengan

$$(x_n) \rightarrow x \text{ atau } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x. \quad (2.6)$$

Contoh 2.7 :

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Penyelesaian:

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Pilih $K > \frac{1}{\varepsilon}$. Untuk setiap $n \geq K$ maka didapatkan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Akibatnya $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Oleh karena itu barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0.

Teorema 2.3 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Jika sebuah barisan konvergen di $\mathbb{R}$, maka barisan tersebut terbatas di $\mathbb{R}$. ”

Bukti:

Misalkan $\lim(z_n) = z$ dan $\varepsilon := 1$ sehingga terdapat bilangan asli $K = K(1)$ sedemikian sehingga $|z_n - z| < 1$ untuk setiap $n \geq K$. Berdasarkan Teorema 2.2, maka didapatkan

$$|z_n| = |z_n - z + z| \leq |z_n - z| + |z| < 1 + |z|.$$

Pilih $M := \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{K-1}|, 1 + |z|\}$, sedemikian sehingga $|z_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Misalkan $a_n \rightarrow a$ dan $b_n \rightarrow b$ saat $n \rightarrow \infty$, maka $a_n b_n \rightarrow ab$ saat $n \rightarrow \infty$.”

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $a_n b_n \rightarrow ab$ saat $n \rightarrow \infty$. Berdasarkan Teorema 2.2 diperoleh

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \\ &\leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b|. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 2.3, terdapat bilangan asli $N_1 > 0$ sedemikian sehingga $|a_n| \leq N_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Pilih $N = \max\{N_1, |b|\}$, sehingga $|a_n| \leq N_1$ dan $|b| \leq N$, diperoleh

$$|a_n b_n - ab| \leq N |b_n - b| + N |a_n - a|$$

Berdasarkan Definisi 2.7, karena $a_n \rightarrow a$ dan $b_n \rightarrow b$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan asli M_1 dan M_2 sedemikian sehingga jika $n \geq M_1$ maka berlaku $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2N}$, dan jika $n \geq M_2$ maka berlaku $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Kemudian memilih $M = \max\{M_1, M_2\}$, maka untuk setiap $n \geq M$ berlaku

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq N |b_n - b| + N |a_n - a| \\ &< N \left(\frac{\varepsilon}{2N} \right) + N \left(\frac{\varepsilon}{2N} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $a_n b_n \rightarrow ab$ saat $n \rightarrow \infty$.

Definisi 2.8 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Barisan $X = (x_n)$ di bilangan real dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq H(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$.”

Contoh 2.8:

Akan dibuktikan barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

Penyelesaian:

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $H > \frac{2}{\varepsilon}$. Jika $m, n \geq H$, maka didapatkan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$. Untuk setiap $m, n \geq H$, maka berlaku

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{H} + \frac{1}{H} = \frac{2}{H} < \varepsilon$$

Jadi barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.

3. Fungsi Kontinu

Pada bagian ini akan dibahas definisi fungsi kontinu, kriteria barisan untuk kekontinuan, kekontinuan pada suatu titik, dan fungsi kontinu seragam yang disertai dengan contohnya.

Definisi 2.9 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Misalkan $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ dan $c \in X$. Fungsi f kontinu pada c jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x adalah sebarang titik di X yang memenuhi $|u - c| < \delta$, berlaku $|f(u) - f(c)| < \varepsilon$.”

Contoh 2.9:

Diberikan fungsi $f(u) = 2u + 1$. Akan ditunjukkan fungsi f kontinu di $c \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ sedemikian sehingga jika untuk sebarang $u \in X$ yang memenuhi $|u - c| < \delta$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(u) - f(c)| &= |(2u + 1) - (2c + 1)| \\ &= |2u + 1 - 2c - 1| \\ &= |2u - 2c| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2|u - c| \\
&< 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Jadi fungsi $f(u) = 2u + 1$ kontinu di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.5 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Diberikan fungsi $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ dan $z \in D$. Maka pernyataan – pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) $\lim_{a \rightarrow z} f(a) = f(z)$
- (ii) Untuk setiap barisan (a_n) di D yang konvergen ke z sedemikian sehingga $a_n \neq z$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka barisan $(f(a_n))$ konvergen ke $f(z)$.”

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan f kontinu di z . Ini berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap a di D yang memenuhi $|a - z| < \delta$, maka berlaku $|f(a) - f(z)| < \varepsilon$.

Ambil sebarang (a_n) yang konvergen ke z dengan $a_n \neq z$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka untuk setiap $\delta > 0$ terdapat bilangan asli K , sehingga jika $n \geq K$, berlaku $|a_n - z| < \delta$.

Akan ditunjukkan bahwa barisan $(f(a_n))$ konvergen ke $f(z)$. Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta_0 = \delta$ kemudian pilih $K_0 = K$, sehingga untuk setiap $n \geq K_0$ maka $|a_n - z| < \delta$ akibatnya berlaku $|f(a_n) - f(z)| < \varepsilon$. Maka dapat dikatakan barisan $(f(a_n))$ konvergen ke $f(z)$.

($\Leftarrow$) Misalkan f tidak kontinu di z . Ini berarti terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan untuk setiap $\delta > 0$ ada $a_\delta \in D$ sedemikian sehingga $|a_\delta - z| < \delta$ berlaku $|f(a_\delta) - f(z)| \geq \varepsilon_0$.

Akan ditunjukkan bahwa barisan (a_n) konvergen ke z , untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Untuk sebarang $k \in \mathbb{N}$, pilih suatu bilangan a_k di sekitar z dengan jari – jari $\frac{1}{k}$ sehingga $|a_k - z| < \frac{1}{k}$. Tetapi menurut hipotesis, diperoleh $|f(a_k) - f(z)| \geq \varepsilon_0$. Jadi disimpulkan bahwa barisan (a_n) di D konvergen ke z , akan tetapi barisan $(f(a_n))$ tidak konvergen ke $f(z)$.

Definisi 2.10 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Misalkan $X \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan kontinu seragam di X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x, u \in X$ merupakan sebarang bilangan yang memenuhi $|x - u| < \delta$, maka berlaku $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.”

Contoh 2.10:

Diberikan fungsi $f(x) = 2x$ untuk setiap $x \in X$. Akan ditunjukkan bahwa f kontinu seragam di $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga untuk sebarang $x, u \in X$ yang memenuhi $|x - u| < \delta$ berlaku,

$$|f(x) - f(u)| = |2x - 2u| = 2|x - u| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi fungsi $f(x) = 2x$ kontinu seragam di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.6 (Bartle & Sherbert, 2011)

“Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Maka pernyataan – pernyataan berikut ekuivalen:

- (i) f tidak kontinu seragam di A
- (ii) Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat x_δ, u_δ di A maka $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ dan $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \varepsilon_0$
- (iii) Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan (x_n) dan (u_n) di A sedemikian sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - u_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.”

Bukti:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Benar berdasarkan Definisi 2.10

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Karena f tidak kontinu seragam di A , maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$, terdapat x_δ, u_δ di A dengan $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ berlaku $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Ambil sebarang (x_n) dan (u_n) di A sedemikian sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - u_n) = 0$. Kemudian pilih $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ dan $n \geq N$ dengan $|x_n - u_n| < \delta$ mengakibatkan $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_1$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Pada bagian ini menggunakan metode kontraposisi.

Misalkan f kontinu seragam di A . Berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x, u \in A$ dengan $|x - u| < \delta$ maka berlaku $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Ambil sebarang barisan (x_n) dan (u_n) di A sedemikian sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - u_n) = 0$. Untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga jika $n \geq N$ maka berlaku $|x_n - u_n| < \delta$. Selanjutnya ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\delta > 0$ dan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ dengan $|x_n - u_n| < \delta_0$ berlaku $|f(x_n) - f(u_n)| < \varepsilon$.

4. Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy merupakan himpunan yang semua elemennya mempunyai fungsi keanggotaan bernilai antara 0 dan 1. Fungsi keanggotaan ini memetakan elemen dari himpunan universal ke dalam interval $[0,1]$, di mana nilai 0 menunjukkan bahwa elemen tersebut bukan anggota himpunan fuzzy dan nilai 1 menunjukkan bahwa elemen tersebut adalah anggota penuh dari himpunan tersebut (Klir & Yuan, 1995).

Definisi 2.11 (Zadeh, 1965)

“Misalkan Z adalah himpunan tak kosong, maka suatu himpunan fuzzy F di himpunan Z didefinisikan sebagai

$$F = \{(z, \mu_F(z)) \mid z \in Z\}. \quad (2.7)$$

dimana $\mu_F : Z \rightarrow [0,1]$ disebut fungsi keanggotaan F di Z .”

Contoh 2.11:

Misalkan $Z = \{1,2,3,4,5,6\}$. Diberikan himpunan fuzzy F di Z dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_F(z) = \frac{1}{1 + (z - 3)^2}$$

Sehingga didapatkan

$$F = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,1), (4,0.5), (5,0.2), (6,0.1), (7,0.05)\}$$

Dari himpunan di atas dapat diketahui bahwa nilai $\mu_F(3) = 1$ yang artinya bilangan 3 merupakan anggota sepenuhnya dari himpunan F , sedangkan bilangan 7 dengan $\mu_F(7) = 0.05$ memiliki keanggotaan yang sangat rendah atau mendekati nol.

5. Ruang Metrik

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai definisi ruang metrik, barisan konvergen di ruang metrik, dan fungsi kontinu di ruang metrik yang disertai dengan contohnya.

Definisi 2.12 (Kustiawan, 2013)

“Misalkan X himpunan tidak kosong. Fungsi $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi metrik (fungsi jarak) jika untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi kondisi – kondisi berikut:

- (i) $d(x, y) \geq 0$
- (ii) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Himpunan X dengan fungsi metrik d disebut ruang metrik dan ditulis dengan notasi (X, d) .”

Contoh 2.12:

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan diberikan fungsi $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $d(p, q) = |p - q|$ untuk setiap $p, q \in A$. Akan ditunjukkan bahwa (A, d) merupakan sebuah ruang metrik.

Penyelesaian:

- (i) Akan ditunjukkan bahwa $d(p, q) \geq 0$. Ambil sebarang $p, q \in A$, maka $d(p, q) = |p - q| \geq 0$ berdasarkan sifat nilai mutlak. Jadi $d(p, q) \geq 0$ untuk setiap $p, q \in A$.
- (ii) Akan ditunjukkan bahwa $d(p, q) = 0$ jika dan hanya jika $p = q$.
($\Rightarrow$) Jika $d(p, q) = 0$, maka

$$\begin{aligned}d(p, q) &= |p - q| \\0 &= p - q \\p &= q\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Jika $p = q$, maka

$$d(p, q) = |p - q| = |p - p| = |0| = 0$$

Jadi $d(p, q) = 0$ jika dan hanya jika $p = q$.

- (iii) Akan ditunjukkan bahwa $d(p, q) = d(q, p)$. Ambil sebarang $p, q \in A$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} d(p, q) &= |p - q| \\ &= | -(-p + q) | \\ &= |q - p| \\ &= d(q, p) \end{aligned}$$

Jadi $d(p, q) = d(q, p)$.

- (iv) Akan ditunjukkan bahwa $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$. Menurut sifat ketaksamaan segitiga di nilai mutlak, maka diperoleh

$$\begin{aligned} d(p, q) &= |p - q| \\ &= |p - r + r - q| \\ &\leq |p - r| + |r - q| \\ d(p, q) &\leq d(p, r) + d(r, q) \end{aligned}$$

Jadi $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

Karena kondisi (i) sampai (iv) terpenuhi, maka dapat disimpulkan (X, d) merupakan ruang metrik.

Definisi 2.13 (Kreyszig, 1978)

“Misalkan (X, d) ruang metrik, (x_n) adalah barisan di X dan $x \in X$. Barisan (x_n) konvergen ke titik x di X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ di mana $n \geq N$.”

Barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0. \quad (2.8)$$

Contoh 2.13:

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi metrik $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $d(a, b) = |a - b|$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$. Diberikan barisan (a_n) yang didefinisikan dengan $a_n = \frac{1}{n}$ dimana $a_n \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$ dengan $x = 0$.

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$ dengan $a = 0$. Dengan menggunakan

definisi ruang metrik, didapatkan $d(a_n, a) = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$.

Sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Maka $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$

Definisi 2.14 (Kustiawan, 2013)

“Diberikan (A, d_A) dan (B, d_B) ruang metrik. Fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan kontinu di titik $p \in A$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $a \in A$ yang memenuhi $d_A(a, p) < \delta$ berlaku $d_B(f(a), f(p)) < \varepsilon$.”

Contoh 2.14:

Misalkan (A, d_A) dan (B, d_B) dua ruang metrik dimana $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dengan metrik $d_A(a_1, a_2) = |a_1 - a_2|$ dan $d_B(b_1, b_2) = |b_1 - b_2|$. Diberikan fungsi $f: A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan $f(a) = 2a$. Akan ditunjukkan bahwa f kontinu di setiap titik $p \in A$.

Penyelesaian:

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga untuk setiap $a \in A$ yang memenuhi $d_A(a, p) < \delta$ berlaku,

$$d_B(f(a), f(p)) = |f(a) - f(p)| = |2a - 2p| = 2|a - p| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa f kontinu di setiap titik $p \in A$.

6. Ruang Metrik Fuzzy

Pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep t -norm yang bersifat kontinu, definisi ruang metrik fuzzy, dan sifat kekonvergenan dalam ruang tersebut yang dilengkapi dengan contohnya.

Definisi 2.15 (Turkoglu dkk., 2008)

“Operator biner $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ disebut t -norm kontinu jika $*$ memenuhi kondisi:

- (i) $a * b = b * a$ (komutatif)
- (ii) $(a * b) * c = a * (b * c)$ (asosiatif)
- (iii) Untuk setiap $a \in [0,1]$, $a * 1 = a$ (identitas)
- (iv) Jika $a \leq c$ dan $b \leq d$ maka $a * b \leq c * d$ untuk setiap $a, b, c, d \in [0,1]$

(v) Operator $*$ merupakan fungsi kontinu.”

Contoh 2.15:

Diberikan $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $a * b = ab$. Berdasarkan definisi, akan tunjukkan bahwa operator $*$ dengan $a * b = ab$ merupakan t -norm kontinu.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $a, b, c, d \in [0,1]$. Akan dibuktikan bahwa operator $*$ dengan $a * b = ab$ merupakan t -norm kontinu

(i) Komutatif

Akan ditunjukkan $a * b = b * a$, maka

$$a * b = ab = ba = b * a$$

(ii) Asosiatif

Akan ditunjukkan $(a * b) * c = a * (b * c)$, maka

$$(a * b) * c = ab * c = (ab)c = a(bc) = a * bc = a * (b * c)$$

(iii) Identitas

Akan ditunjukkan $a * 1 = a$, untuk setiap $a \in [0,1]$, maka

$$a * 1 = a \cdot 1 = a$$

(iv) Monoton

Akan ditunjukkan $a * b \leq c * d$, dimana $a \leq c$ dan $b \leq d$, untuk setiap $a, b, c, d \in [0,1]$.

Jika $a \leq c$, maka $a * b = ab \leq cb = c * b$

Jika $b \leq d$, maka $b * c = bc \leq dc = d * c$

Sehingga $a * b = ab \leq cb = c * b = bc \leq dc = d * c$

(v) Operator $*$ merupakan fungsi kontinu

Akan ditunjukkan bahwa fungsi $*$ kontinu di (a, b) .

Operator $*$ kontinu apabila $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$ saat $n \rightarrow \infty$ mengakibatkan $(a_n * b_n) \rightarrow (a * b)$.

Misalkan $a_n \rightarrow a$ dan $b_n \rightarrow b$ maka $(a_n \cdot b_n) \rightarrow (a \cdot b)$. Selanjutnya dicari

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a \cdot b = (a * b).$$

Jadi $*$ merupakan fungsi kontinu di (a, b) .

Karena kondisi (i) sampai (v) terpenuhi, maka operator $*$ dengan $a * b = ab$ merupakan t -norm kontinu.

Definisi 2.16 (George & Veeramani, 1994)

“Misalkan X adalah suatu himpunan tak kosong, $*$ adalah t -norm kontinu dan $M: X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0,1]$. Maka $(X, M, *)$ dikatakan sebagai ruang metrik fuzzy apabila untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $s, t > 0$ berlaku kondisi berikut:

- (i) $M(x, y, t) > 0$
- (ii) $M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$
- (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$
- (iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$
- (v) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0,1]$ kontinu.”

Contoh 2.16: (George & Veeramani, 1994)

Misalkan $X \subseteq \mathbb{R}$. Didefinisikan $a * b = ab$ dan

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \right]^{-1},$$

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan t pada interval $(0, \infty)$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $(X, M, *)$ merupakan RMF.

Penyelesaian:

- (i) Akan ditunjukkan bahwa $M(x, y, t)$ bernilai positif. Misalkan $k = \frac{|x-y|}{t}$, maka $\exp(k) > 0$ untuk $k \in \mathbb{R}$ dan $\left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \right]^{-1} > 0$. Dengan demikian $M(x, y, t) > 0$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $t > 0$.

- (ii) Akan ditunjukkan $M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$.

($\Rightarrow$) Misal $M(x, y, t) = 1$. Diketahui bahwa

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \right]^{-1} = 1 \text{ jika } \left(\frac{|x-y|}{t}\right) = 0. \text{ Karena } t > 0, \text{ diperoleh}$$

$$|x - y| = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x = y.$$

($\Leftarrow$) Misal $x = y$, maka

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{|x - x|}{t}\right) \right]^{-1} = [\exp(0)]^{-1} = 1.$$

Jadi $M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $M(x, y, t) = M(y, x, t)$. Berdasarkan sifat nilai mutlak didapatkan

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{|y - x|}{t}\right) \right]^{-1} = M(y, x, t).$$

(iv) Akan ditunjukkan $M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) \cdot M(y, z, s)$. Diketahui

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \right]^{-1}, \quad M(y, z, s) = \left[\exp\left(\frac{|y - z|}{s}\right) \right]^{-1}, \text{ dan}$$

$$M(x, z, t + s) = \left[\exp\left(\frac{|x - z|}{t + s}\right) \right]^{-1}.$$

Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga, diketahui bahwa

$$|x - z| \leq \left(\frac{t + s}{t}\right) |x - y| + \left(\frac{t + s}{s}\right) |y - z|$$

Maka

$$\begin{aligned} \left(\frac{|x - z|}{t + s}\right) &\leq \left(\frac{|x - y|}{t}\right) + \left(\frac{|y - z|}{s}\right) \\ \left[\exp\left(\frac{|x - z|}{t + s}\right)\right] &\leq \exp\left[\left(\frac{|x - y|}{t}\right) + \left(\frac{|y - z|}{s}\right)\right] \\ \left[\exp\left(\frac{|x - z|}{t + s}\right)\right] &\leq \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right] \left[\exp\left(\frac{|y - z|}{s}\right)\right] \\ \left[\exp\left(\frac{|x - z|}{t + s}\right)\right]^{-1} &\geq \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right]^{-1} \left[\exp\left(\frac{|y - z|}{s}\right)\right]^{-1} \end{aligned}$$

Sedemikian sehingga $M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) \cdot M(y, z, s)$.

(v) Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ kontinu.

Perhatikan bahwa

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \right]^{-1} = e^{-\frac{|x - y|}{t}}$$

Misalkan $f(t) = e^t$, jelas bahwa f merupakan fungsi yang kontinu.

Kemudian misalkan $g(t) = -\frac{|x - y|}{t}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $t \neq 0$.

Perhatikan bahwa g merupakan fungsi kontinu terhadap t . Sehingga didapatkan:

$$(f \circ g)(t) = e^{-\frac{|x-y|}{t}} = M(x, y, t).$$

Karena fungsi f dan g kontinu, maka fungsi komposisinya juga kontinu.

Karena (i) sampai (v) terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa $(X, M, *)$ adalah ruang metrik fuzzy.

Lemma 2.1 (Grabiec, 1988)

“Misalkan $X \subseteq \mathbb{R}$. Didefinisikan $a * b = ab$, maka $M(x, y, \cdot)$ adalah fungsi tidak turun (*nondecreasing*) untuk setiap $x, y \in X$.”

Bukti:

Dengan menggunakan kontradiksi, misalkan $M(x, y, t) > M(x, y, s)$ di mana $0 < t < s$. Sehingga

$$M(x, y, s) \geq M(x, y, t) \cdot M(y, y, s - t).$$

Berdasarkan Definisi (2.18) bagian (ii) maka, $M(y, y, s - t) = 1$. Selanjutnya substitusikan $M(y, y, s - t) = 1$ ke $M(x, y, s) \geq M(x, y, t) \cdot M(y, y, s - t)$. Maka,

$$M(x, y, s) \geq M(x, y, t) \cdot M(y, y, s - t)$$

$$M(x, y, s) \geq M(x, y, t) \cdot 1$$

Sehingga didapatkan

$$M(x, y, s) \geq M(x, y, t)$$

Ini menyatakan bahwa nilai $M(x, y, s)$ tidak boleh lebih kecil dari $M(x, y, t)$ yang mana hal ini bertentangan dengan asumsi awal dimana $M(x, y, t) > M(x, y, s)$. Maka fungsi metrik fuzzy $M(x, y, \cdot)$ adalah fungsi tidak turun (*nondecreasing*).

Definisi 2.17 (Aiwa Pratama dkk., 2021)

“Misalkan $(X, M, *)$ adalah ruang metrik fuzzy, maka barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon \in (0, 1)$ dan $t > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga $M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ untuk semua $n \geq N$.”

Barisan (x_n) di ruang metrik fuzzy $(X, M, *)$ dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ jika dan hanya jika untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1 \quad (2.9)$$

Contoh 2.17:

Diberikan ruang metrik fuzzy $(X, M, *)$ dengan fungsi

$$M(x_n, x, t) = \frac{t}{t + |x_n - x|}$$

dan barisan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa barisan (x_n) konvergen ke $x = 0$ dengan $x \in X$ pada ruang metrik fuzzy $(X, M, *)$.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\varepsilon \in (0,1)$ dan $t > 0$, pilih $N > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon t}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{n}, 0, t\right) &= \frac{t}{t + \left|\frac{1}{n} - 0\right|} = \frac{t}{t + \frac{1}{n}} = \frac{nt}{nt + 1} = \frac{nt + 1 - 1}{nt + 1} \\ &= 1 - \frac{1}{nt + 1} > 1 - \frac{1}{Nt + 1} > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $M\left(\frac{1}{n}, 0, t\right) > 1 - \varepsilon$. Berdasarkan Definisi 2.17 maka dapat disimpulkan bahwa barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke $x = 0$.

UIN IMAM BONJOL
PADANG

B. Literatur Review

Terdapat beberapa literatur yang membahas terkait ruang metrik *fuzzy* dan fungsi kontinu pada ruang metrik *fuzzy*. Literatur pertama dengan judul “*Kekontinuan Fungsi pada Ruang Metrik*” (Kustiawan, 2013) membahas tentang konsep fungsi dalam ruang metrik dengan fokus pada beberapa aspek penting seperti limit fungsi, kekontinuan, kekontinuan seragam, serta kekompakan fungsi dalam ruang metrik. Hasil penelitian ini memberikan landasan teoritis untuk pemahaman yang lebih mendalam terkait perilaku fungsi dalam konteks ruang metrik.

Literatur kedua yang berjudul “*Fixed Point Theorem on Fuzzy Metric Spaces*” (Zicky dkk., 2019). Artikel ini membahas pengembangan ruangmetrik *fuzzy* dengan menerapkan teorema titik tetap di ruang tersebut. Selain itu, dibahas juga mengenai konsep – konsep dasar kekongruenan barisan, barisan Cauchy, serta kelengkapan di RMF. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa meskipun dalam konteks *fuzzy*, beberapa sifat metrik klasik seperti konvergensi dan titik tetap masih berlaku di ruang metrik *fuzzy*.

Selanjutnya literatur ketiga yaitu berjudul “*The Space of Continuous Function Between Fuzzy Metric Space*” (Aydogdu dkk., 2020). Artikel tersebut membahas tentang penerapan metrik *fuzzy* pada ruang fungsi kontinu. Dalam studi tersebut, mengkaji beberapa sifat penting dari ruang fungsi tersebut seperti kelengkapan dan kekompakan. Hasil dari penelitian ini memberikan wawasan lebih lanjut mengenai karakter khusus dari ruang fungsi kontinu dalam konteks ruang metrik *fuzzy*.

Literatur keempat berjudul “*Himpunan Kompak pada Ruang Metrik Fuzzy*” (Aiwa Pratama dkk., 2021) membahas konsep himpunan kompak dalam ruang metrik *fuzzy* yang menggunakan pendefinisian ruang metrik *fuzzy* dari George dan Veeramani, yaitu dengan bantuan *t-norm* kontinu. Hasil penelitian tersebut menunjukkan definisi dan sifat himpunan kompak pada ruang metrik *fuzzy* serta hubungan himpunan kompak dan barisan pada ruang metrik *fuzzy*.

Literatur kelima berjudul “*On Completeness and Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Space*” (Gregori dkk., 2024) yang membahas pentingnya konsep

completeness dalam pembuktian teorema titik tetap di RMF. Artikel ini memperkenalkan gagasan *p-completeness*, yaitu sebuah bentuk kelengkapan yang lebih kuat untuk melonggarkan beberapa kondisi tambahan pada ruang tersebut. Hasil penelitian ini menunjukkan relevansi gagasan kelengkapan yang digunakan untuk menetapkan teorema titik tetap pada ruang metrik fuzzy yang diperkenalkan oleh Kramosil dan Michalek.

Berdasarkan beberapa literatur di atas, telah dibahas mengenai teorema titik tetap, kelengkapan dan kekompakan dalam ruang metrik *fuzzy*. Namun, belum ada yang membahas tentang kriteria kekonvergenan fungsi kontinu dan kontinu seragam pada ruang metrik *fuzzy*. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas kriteria kekonvergenan fungsi kontinu dan kontinu seragam pada ruang metrik *fuzzy*.

